ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1986

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés, et ceux-ci seulement.*

»»»»»»»»»»»»o«««««««««««

SUJET N° 1

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, $x \neq \pm \alpha \pmod{2\pi}$,

$$f_n(x) = \frac{\cos nx - \cos n\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$$

où α est un réel donné.

1 – Déterminer $\boxed{\ell} = \lim_{x \to \alpha} f_n(x)$, quand $\alpha \neq k\pi$, k entier.

2 – Dans le cas où $\alpha = k\pi$, k entier, calculer encore $\boxed{\ell}$.

3 – On suppose désormais $\alpha \neq k\pi$, comme dans le 1 –. En posant $z = e^{ix}$ et $a = e^{i\alpha}$, «linéariser» l'expression f_n, c'est-à-dire la mettre sous la forme

$$f_n(x) = C_n(\alpha) + 2\sum_{k=1}^{n-1} C_k(\alpha) \cdot \cos(n-k)x,$$

où les $\boxed{C_k(\alpha)}$ sont des constantes que l'on calculera.

4 – En utilisant ce résultat, où autrement, calculer

$$\boxed{I_n(\alpha)} = \int_0^{2\pi} f_n(x)\, dx$$

5 – Calculer

$$\boxed{J_n} = \int_0^{\pi} I_n(\alpha)\, d\alpha$$

Tournez la page S. V. P.

SUJET N° 2

Soit E l'ensemble des fonctions f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, et vérifiant

$$f'(x) = f\left(\frac{x}{2}\right), \qquad f(0) = 1.$$

1 – Démontrer que toute fonction $f \in E$ est indéfiniment dérivable. Montrer en particulier l'existence d'une suite $\boxed{(a_n)}$, que l'on déterminera, telle que

$$f^{(n)}(x) = a_n \cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

2 – Que vaut le rayon de convergence $\boxed{R}$ de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{x^n}{n!}$?

3 – Soit g la fonction définie sur $]-R, R[$ par la série précédente. Montrer que g est l'unique élément de E.

4 – Dresser un tableau de variation de g, en se restreignant à l'intervalle $[0, R[$. On précisera $\boxed{\lim_{x \to R} \frac{g(x)}{x}}$

5 – Calculer $\boxed{g(1)}$ avec 5 chiffres significatifs. On indiquera la méthode employée et la machine utilisée.

SUJET N° 3

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (u_n) par

$$u_n = \frac{1}{n!}(1! + 2! + \ldots + n!) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!, \qquad u_0 = 0 .$$

1 – Etablir une $\boxed{\text{récurrence}}$ très simple exprimant u_n en fonction de u_{n-1} , $n \geqslant 1$.

2 – Montrer que $\lim u_n = 1$. Préciser ce résultat en prouvant l'existence d'une constante $\boxed{a_1}$ et d'une suite $\varepsilon(n)$, tendant vers 0 , telles que

$$u_n = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n} .$$

3 – Plus généralement, pour tout entier $k \geqslant 0$, fixé, démontrer l'existence d'un développement asymptotique de u_n du type

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots + \frac{a_k}{n^k} + o\left(\frac{1}{n^k}\right), \qquad n \to \infty$$

4 – Etablir une $\boxed{\text{récurrence}}$ exprimant a_k en fonction des a_j d'indices $j < k$.

5 – Par ce moyen, ou autrement, calculer la valeur de $\boxed{a_{10}}$.

SUJET N° 4

Soit (g_n) la suite de fonctions, définies pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geqslant 1$, par

$$g_n(x) = (1-x)^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

1 – Montrer que $g_n(x)$ admet, pour tout $x \in [0,1]$, une certaine limite $\boxed{G(x)}$ que l'on déterminera.

2 – Calculer la dérivée de g_n en la mettant, pour $x \in [0,1[$, sous la forme

$$g_n'(x) = n(1-x)^{n-1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \cdot h_n(x) ,$$

où $\boxed{h_n(x)}$ est une fonction que l'on précisera.

Tournez la page S.V.P.

3 – Prouver l'existence d'un unique réel $r_n \in]0,1[$ pour lequel $g'(r_n) = 0$.

4 – Montrer que $\lim r_n = 0$, et donner de r_n un équivalent sous la forme $r_n \sim \frac{C}{n}$ où $\boxed{C}$ est une constante > 0 que l'on calculera.

5 – En déduire un équivalent simple de $\boxed{S_n} = g_n(r_n)$. Que peut-on dire de la convergence de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction limite G ?

SUJET N° 5

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$, qui soit une contraction, en ce sens que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\|f(x)\| \leqslant \|x\| ,$$

Peu importe la norme $\|\ \|$, qui, dans ce qui suit, est choisie une fois pour toutes. Le produit de deux endomorphismes f et g s'écrira f.g , et est donc tel que, pour tout x de $\mathbb{R}^p$

$$(f.g)(x) = f(g(x)).$$

L'endomorphisme identité se notera I. On introduit enfin, pour n entier $\geqslant 1$,

$$T_n = \frac{1}{n}(f + f^2 + \ldots + f^n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^k$$

On vérifie sans peine que $\|x\| \geqslant \|f^n(x)\|$, et que $\|x\| \geqslant \|T_n(x)\|$.

1 – Soient k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Démontrer l'égalité

$$T_n \cdot (f^k - I) = (f^k - I) \cdot T_n \quad ,$$

et, appelant $\boxed{S_{n,k}}$ cet endomorphisme, l'exprimer comme une combinaison linéaire de puissances de f .

2 – Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminer la valeur $\boxed{s(x)}$ de la limite de $S_{n,k}(x)$ pour n tendant vers l'infini, l'entier k étant fixé.

3 – Montrer que l'on a aussi

$$T_n \cdot (T_k - I) = (T_k - I) \cdot T_n \ .$$

Appelant $R_{n,k}$ cet endomorphisme, déterminer encore $\boxed{r} = \lim_{n \to \infty} R_{n,k}(x)$, k fixé.

4 – Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^p$, on peut extraire de la suite $(T_n(x))_{n \geqslant 0}$ une sous-suite $(T_{n_q}(x))_{q \geqslant 0}$ convergente vers une certaine limite $\ell = \ell(x)$. Montrer que ℓ est point fixe pour f (donc $f(\ell) = \ell$) , et aussi pour T_n (donc $T_n(\ell) = \ell$).

5 – a – En écrivant

$$T_n(x) - \ell = \{T_n(x) - (T_n \cdot T_{n_q})(x)\} + \{(T_n \cdot T_{n_q})(x) - \ell\} \ ,$$

montrer que $T_n(x)$ tend vers ℓ quand n tend vers l'infini.

b – Que vaut $\boxed{\ell} = \ell(x)$ si f n'admet pas + 1 pour valeur propre ?

»»»»»»»»»»o«««««««««««